PROPORTIONNALITE ET APPLICATIONS

I. Proportionnalité :

1) Définition :

Définition :

Un tableau traduit une situation de proportionnalité lorsqu'on passe d'une ligne à l'autre en multipliant *(Ou en divisant)* toujours par le même nombre.

Ce nombre est appelé coefficient de proportionnalité.

Vocabulaire : On dit alors que les deux grandeurs sont proportionnelles.

Remarque : Dans une situation de proportionnalité, la relation est déterminée par un couple de valeurs correspondantes non nulles.

2) Propriétés :

Propriété :

Lorsque dans deux colonnes d'un tableau de proportionnalité on connait trois nombres alors il est toujours possible de calculer le quatrième.

On dit que l'on calcule la quatrième proportionnelle.

Exemple :

Dans un hypermarché, le prix de $2\ kg$ de cerises est de 10 €.
En supposant que le prix des cerises est proportionnel à la masse de cerises achetées, compléter le tableau de proportionnalité ci-dessous.

Masse de cerise *(en kg)*	2	6	8	$3{,}2$
Prix *(en €)*	10	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Rappel : on peut utiliser diverses méthodes pour compléter un tableau de proportionnalité

- La méthode multiplicative :

$\times 3$

Masse de cerise *(en kg)*	2	6
Prix *(en €)*	10	30

$\times 3$

Ainsi, pour $6\ kg$ de cerises il faudra débourser 30 €.

- La méthode additive :

$+$

Masse de cerise *(en kg)*	2	6	8
Prix *(en €)*	10	30	40

$+$

Ainsi, pour $8\ kg$ de cerises il faudra débourser 40 €.

- Le coefficient de proportionnalité :

Masse de cerise *(en kg)*	2	3,2
Prix *(en €)*	10	16

$\times 5$

Ainsi, pour 3,2 kg de cerises il faudra débourser 16 €.

3) Quatrième proportionnelle et produits en croix égaux :

Pour déterminer la quatrième proportionnelle dans un tableau de proportionnalité, on peut aussi utiliser la propriété des produits en croix égaux.

Propriété :

Soient a, b, c et d sont des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $a \times d = b \times c$
- Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Preuve :

- Soient a, b, c et d des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité

a	c
b	d

Ainsi, si l'on désigne par k le coefficient de proportionnalité alors $b \times k = a$ et $d \times k = c$
Et alors, on a bien $a \times d = bk \times d = b \times dk = b \times c$.
Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b}$ *(Ce qui prouve l'égalité)*

- Soient a, b, c et d des nombres relatifs tels que $a \times d = b \times c$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$

On a alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ *(D'après la propriété des quotients égaux)*

Et donc, $\frac{a}{b} = \frac{b \times c}{b \times d}$ *(D'après l'hypothèse de départ)*

Ce qui implique nécessairement $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *(D'après la propriété des quotients égaux)*

Propriété :

- Dans un tableau de proportionnalité, il y a égalité des produits en croix.
- Réciproquement si tous les produits en croix d'un tableau sont égaux, alors il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

Exemple :

Dans une boulangerie, le prix à payer pour 5 baguettes est de 4€25.
En supposant que le prix du pain est proportionnel au nombre de baguettes achetées, déterminer le prix à payer dans cette boulangerie pour 2 baguettes.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Nombre de baguettes	5	2
Prix en euros	4,25	x

Il y a donc égalité des produits en croix.

Cela donne ici : $5 \times x = 4{,}25 \times 2$

Donc $x = \frac{4{,}25 \times 2}{5} = \frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

BILAN : Il faudra dépenser 1€70 dans cette boulangerie pour 2 baguettes.

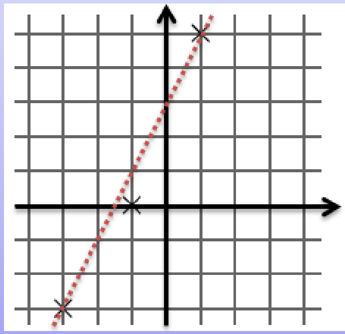
4) Représentation graphique :

Propriété :

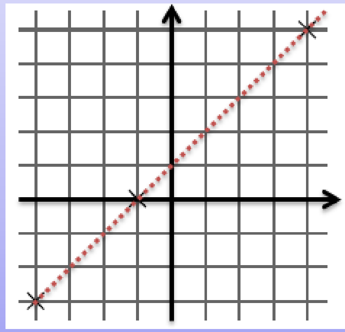
- Si, dans un repère, on représente une situation de proportionnalité alors on obtient des points alignés avec l'origine du repère.
- Si une situation est représentée par des points alignés avec l'origine du repère alors c'est une situation de proportionnalité.

Exemple :

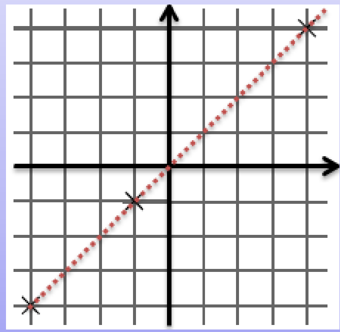
Voici trois représentations graphiques



Il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés.



Il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité car les points ne sont alignés mais pas avec l'origine du repère.



Il s'agit d'une situation de proportionnalité car les points sont alignés avec l'origine du repère.

II. Applications :

1) Les pourcentages :

Définition :

Un pourcentage est un coefficient de proportionnalité de dénominateur 100.

Ainsi si *p* est un nombre donné, pour calculer *p* % d'un nombre, on multiplie ce nombre par $\frac{p}{100}$

Exemple :

Calculer 3% d'un prix signifie que ce prix est multiplié par $\frac{3}{100}$

Exemple :

Dans un collège, 80 % des élèves sont demi-pensionnaires et, parmi ces demi-pensionnaires 35 % sont des filles. On sait, d'autre part, que le collège compte 450 élèves en tout.

a. Quel est le nombre de demi-pensionnaires de ce collège ?

b. Quel est le nombre de filles demi-pensionnaires ?

c. On sait que parmi les élèves, 65 ont déclarés souffrir d'une allergie alimentaire particulière. Quel pourcentage du nombre total de demi-pensionnaires représentent-ils ?

Résolution :

a. On cherche le nombre de demi-pensionnaires dans le collège *(Ils représentent* $80\ \%$ *des* 450 *élèves)*

$$450 \times 80\ \% = 450 \times \frac{80}{100} = 360$$

Dans ce collège, il y a donc 360 demi-pensionnaires.

b. On cherche le nombre de filles demi-pensionnaires dans ce collège *(Elles représentent* 35% *des demi-pensionnaires)*

$$360 \times 35\ \% = 360 \times \frac{35}{100} = 126$$

Ainsi, il y a 126 filles demi-pensionnaires dans ce collège.

c. On cherche le pourcentage des demi-pensionnaires allergiques :

Nombre d'élèves allergiques	65	x
Nombre total de demi-pensionnaires	360	100

L'égalité des produits en croix donne : $65 \times 100 = 360 \times x$

Donc $x = \dfrac{65 \times 100}{360} = \dfrac{6\ 500}{360} \approx 18$

Bilan : Le pourcentage de demi-pensionnaires allergiques est d'environ $18\ \%$.

2) Les échelles :

Définition :

Sur un plan à l'échelle, les longueurs du plan sont proportionnelles aux longueurs réelles. L'échelle du plan est le quotient d'une longueur sur le plan par la longueur réelle correspondante.

Remarque :

- Les longueurs doivent absolument être exprimées dans la même unité.
- Lorsque l'échelle est inférieure à 1, on parle d'échelle de réduction et lorsqu'elle est supérieure à 1, on parle d'échelle d'agrandissement.

Exemple :

Voici une carte à l'échelle de la France :

Question : Déterminer la distance à vol d'oiseau entre Paris et Londres ; puis entre Paris et Bruxelles.

III. Mouvement uniforme :

1) Définition :

Définition :

Un mouvement est uniforme lorsque la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours.

Le coefficient de proportionnalité du tableau reliant distance et temps est appelé vitesse moyenne de l'objet.

2) Vitesse moyenne : *(introduite comme coefficient de proportionnalité entre la distance parcourue et le temps de parcours dans un mouvement uniforme)*

Propriété :

Si un mobile parcourt une distance d en un temps t alors on définit la vitesse moyenne v de ce mobile comme le quotient de d par t.

Autrement dit :

$v = \dfrac{d}{t}$ avec d : distance parcourue et t : temps de parcours

Conséquence : On en déduit, d'après l'égalité des produits en croix, que $d = v \times t$ et $t = \dfrac{d}{v}$

Exemple :

Jeremy est partie de chez lui à $6\ h$ et est arrivé au camping où il va séjourner durant ses vacances à $17\ h\ 30$. Il a parcouru 735 kilomètres en voiture.

1) Quelle a été la vitesse moyenne lors du trajet ?
2) Est-il possible qu'il reçoive un *PV* pour excès de vitesse lors de ce trajet ?

1) Afin de pouvoir appliquer la formule, il faut connaître la distance parcourue ($735\ km\ ici$) ainsi que le temps de parcours ($11\ h\ 30, soit\ 11{,}5\ h$)

Par conséquent, la vitesse moyenne lors de ce trajet est donnée par :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{735}{11{,}5} \approx 64\ km/h$$

2) Il est possible qu'il ait quand même commis un excès de vitesse lors de ce trajet. En effet, il ne faut pas confondre vitesse moyenne et vitesse instantanée *(Celle mesurée à un instant donné par un radar)*